

1.7.1 Výrazy, definiční obor

Předpoklady: 1207, 1209

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny stačí tak na 20 minut. Zbytek je připraven pro písemku.

Výrazy: $1+1$; $\frac{a-b}{\pi+a}$; $\sqrt{a^2+b^2}$; $|x-2|+y^2$; $\frac{1}{3}\pi vr^2$.

Obsahují:

- matematické operace,
- čísla (**konstanty**),
- písmena (**proměnné**) = „žolíky“, místo kterých mohu dosazovat čísla z nějaké množiny (definičního oboru proměnné), někdy za ně dosazujeme cokoliv, častěji mají čísla dosazovaná za proměnnou nějaký význam (například ve výrazu $\frac{1}{3}\pi vr^2$, který představuje vzorec pro objem kužele, mají čísla dosazovaná za proměnnou v význam výšky kužele).

Pozor!!!! π je číslo (konstanta), i když je zapsané písmenem, protože písmeno π znamená stále stejné číslo.

Poznámka: Situace se znakem π je poměrně jednoduchá, protože se nikdy nepoužívá v jiném významu než jako označení Ludolfova čísla ($\pi \doteq 3,14$). Horší je situace s písmenem e , které jednak označuje jednu ze základních matematických konstant tzv. Eulerovo číslo ($e \doteq 2,78$), na druhé straně se občas používá k označování obyčejných proměnných. V jejím případě je nutné aktuální význam rozeznat vždy z kontextu. Na vysokých školách je konstant a proměnných, které potřebují označit nějakým písmenem tolik, že nepostačují ani dvě abecedy (latinka a řecká) a různé velikosti písmenek.

Definiční obor výrazu (dále jen definiční obor) = vše, co můžeme dosazovat $\Rightarrow$ záleží na úhlu pohledu:

- „co je rozumné“ $\Rightarrow \frac{1}{3}\pi vr^2$ - objem kužele $\Rightarrow$ za r i v můžeme dosazovat pouze kladná čísla,
- „co to unese“ $\Rightarrow \frac{1}{3}\pi vr^2$ - obecný výraz bez speciálního smyslu (matematicky) $\Rightarrow$ za r i v můžeme dosazovat všechna reálná čísla, protože pro všechna reálná čísla ho dokážeme spočítat.

Není-li určeno jinak, **definičním oborem výrazu rozumíme množinu všech čísel, pro která dokážeme výraz spočítat** (určit hodnotu) $\Rightarrow$ je třeba dát pozor na operace, které nejdou provést se všemi čísly (dělení, odmocňování ...).

Definiční obor výrazu v pro proměnnou x budeme značit $D(v)_x$ (Pokud výraz obsahuje pouze jedinou proměnnou, nebudeme ji vypisovat).

Po dosazení čísel z definičního oboru za proměnné a spočítáním získáme **hodnotu výrazu**.

Př. 1: Urči definiční obor výrazu $\frac{x}{x+3}$ a jeho hodnotu pro $x = -4; -3; -2; 0; 1$.

Nebezpečné operace, které nejdou provést se všemi čísly: dělení.

Dělíme číslem $x+3 \Rightarrow x+3 \neq 0$ a tedy $x \neq -3 \Rightarrow D(v) = R - \{-3\}$.

Výpočet hodnot:

- $x = -4: \frac{x}{x+3} = \frac{-4}{-4+3} = \frac{-4}{-1} = 4,$
- $x = -3: \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{-3+3} = \frac{-3}{0} \Rightarrow$ nejde spočítat (neměli jsme ani dosazovat, protože -3 nepatří do definičního oboru),
- $x = -2: \frac{x}{x+3} = \frac{-2}{-2+3} = -2,$
- $x = 0: \frac{x}{x+3} = \frac{0}{0+3} = 0,$
- $x = 1: \frac{x}{x+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}.$

Pedagogická poznámka: Určitě se objeví značné množství řešení vyřazujících z definičního oboru nulu („je tam dělení“), proto je důležité napsat na tabuli dosazení minimálně pro $x = -3$ a $x = 0$, ze kterých je vidět, pro které číslo hodnotu vypočítat nejde a pro které vypočtení hodnoty není žádný problém.

Př. 2: Urči definiční obor výrazu pro proměnnou x ve výrazu $\frac{x^2-1}{x-2}$ a urči jeho hodnotu pro $x = 3$.

Ve výrazu je dělení, nelze dělit nulou, proto $x-2 \neq 0$ a tedy $x \neq 2 \Rightarrow D(v) = R - \{2\}$.

Hodnota výrazu $\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{3^2-1}{3-2} = 8$.

Pedagogická poznámka: Studentům je potřeba opakovaně zdůrazňovat, že definiční obor sestavujeme na základě jediného pravidla – „vylučujeme čísla, se kterými nelze provést všechny operace ve výrazu“. Nic víc by si pamatovat neměli, protože hlavně ti méně nadaní mají sklon k tvorbě pravidel typu: „když se dělí, nesmí být x nula“ nebo „pod odmocninou musí být x větší než nula“ a vůbec neberou ohled na to, zda je pod odmocninou pouze x nebo nějaký výraz, který x obsahuje.

Pro hledání definičního oboru používáme jediné pravidlo.

Z definičního oboru vylučujeme čísla, pro která nejsme schopni výraz vyčíslit (provést všechny požadované operace).

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je test na dodržování pravidel. I když všichni vědí, že nulou se nedá dělit, přesto se vždy najde pár takových, kteří to úspěšně udělají a hodnotu výrazu (nesprávně) určí.

Př. 7: Najdi co nejrychlejší způsob, jak rozhodnout, jestli čísla $\{-2; 0; 1\}$ patří do

definičního oboru výrazu $\frac{x^2 - 2}{x^2 - 4x + 3}$.

Bylo by možné rozhodnout tak, že určíme definiční obor a zjistíme, zda do něj čísla patří nebo ne. Vzhledem k tomu, že je čísel málo, je daleko rychlejší zkusit je dosadit do jmenovatele zlomku a spočítat jej. Pokud vyjde ve jmenovateli nula, číslo do definičního oboru nepatří, pokud vyjde nenulový, číslo do něj patří.

$x = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (-2)^2 - 4(-2) + 3 = 15 \Rightarrow$ číslo -2 do definičního oboru patří.

$x = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow$ číslo 3 do definičního oboru patří.

$x = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow$ číslo 1 do definičního oboru nepatří, dělili bychom nulou.

Pedagogická poznámka: Cvičení na zkostnatělost myšlení. Jen málo studentů bude opravdu uvažovat o nejsnazším řešení, většina bude opakovat postup z předchozích příkladů.

Shrnutí: Pro určování definičního oboru nám stačí jediné pravidlo: vyloučíme všechna čísla, pro která nedokážeme výraz spočítat.